Transition Maths and Algebra with Geometry

Tomasz Brengos

Lecture Notes
Electrical and Computer Engineering

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Contents

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Well known sets

You have come across the following sets:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ - the set of natural numbers

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ - the set of integers

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}$ and $q \neq 0\}$ - the set of rational numbers

$\mathbb{R}$ - the set of real numbers

Sets: definition

Definition

A *set* is an unordered collection of distinct elements. We will use the notation $x \in S$ to denote that "x is an element of the set S". We use curly brackets to identify elements of a set, e.g. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$.

Example: $S = \{a, b, c, d\}$. Clearly, $a \in S$ but $e \notin S$.

Notation

If A and B are sets then we say that A *is a subset of* B and write $A \subseteq B$ whenever $x \in A$ implies $x \in B$. We say that two sets A and B are *equal* and write $A = B$ if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$.

Sets: notations

Example: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Clearly, $A \subseteq B$ and $A \neq B$. Sometimes it is impossible to list all elements of a set. In that case we will use the following notation:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} \text{ or } \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x > 3\}$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Basic operations

Set operations

If A and B are sets then:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}, \\
A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}, \\
A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}, \\
A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}.
\end{aligned}$$

Basic operations

Example: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cap B = \{3\},$$
$$A \setminus B = \{1, 2\},$$
$$B \setminus A = \{4, 5\}.$$

Let $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Contents

Let X, Y be sets.

Definition

Any subset $R \subseteq X \times Y$ is called a *relation* between set X and Y. If $Y = X$ then we say that $R \subseteq X \times X$ is a *relation on a set* X.

Let $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Examples of relations between A and B:
$\varnothing, \{(1, a), (2, a)\}, \{(2, b)\}, A \times B$

Relations: notation

Let R be a relation between X and Y. For a pair $x \in X$ and $y \in Y$ we write xRy whenever $(x, y) \in R$. Example:
For $A = \{1, 2\}$ and $B = \{a, b, c\}$ and $R = \{(1, a), (1, b)\}$ we have $1Ra$ and $1Rb$.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Functions: definition

Definition

If A and B are two sets, then a *function* f from a set A to B is a relation $f \subseteq A \times B$ such that for any $a \in A$ there is a unique $b \in B$ such that afb.

If f from A to B is a function then we write $b = f(a)$ instead of afb. We write $f : A \to B$ to indicate that f is a function from A to B. If $f : A \to B$ then the set A is called *the domain* of f and B is called *the codomain* of f.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Functions: definition

Example: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$

$$f(1) = b,$$
$$f(2) = d,$$
$$f(3) = b.$$

$$g(1) = d,$$
$$g(2) = c,$$
$$g(3) = b.$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Image

Definition

Let A and B are sets and $f : A \to B$ be a function. If $X \subseteq A$ then *the image of* X, denoted by $f(X)$, is the set

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

Example: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$

$$f(1) = a, f(2) = d, f(3) = d.$$

Then: $f(\{1\}) = \{a\}, f(\{1, 3\}) = \{a, d\}, f(\{2, 3\}) = \{d\}$.

Definition

If $f : A \to B$ is a function then the set $f(A)$ is called the image of f.

Warning: Image of a function is not the same as its codomain.

Functions: other definitions

Example: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

$$\begin{aligned} f(1) &= b, \\ f(2) &= d, \\ f(3) &= b. \end{aligned}$$

The codomain of f is B, whereas the image is $\{b, d\}$.

$$\begin{aligned} g(1) &= d, \\ g(2) &= c, \\ g(3) &= b. \end{aligned}$$

The codomain of g is B, whereas the image is $\{b, c, d\}$.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Inverse image

Definition

Let A and B are sets and $f : A \to B$ be a function. If $Y \subseteq B$ then *the inverse image of* Y, denoted by $f^{-1}(Y)$, is the set

$$f^{-1}(Y) := \{x \mid f(x) \in Y\}$$

Example: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$

$$f(1) = a, f(2) = d, f(3) = d.$$

Then: $f^{-1}(\{a\}) = \{1\}, f^{-1}(\{d\}) = \{2, 3\}, f^{-1}(\{b\}) = \varnothing.$

Fact

If $f : A \to B$ is a function then $f^{-1}(B) = A$.

Function composition

Definition

If $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are functions then the *composition* $g \circ f$ is a function whose domain is A and whose codomain is C which is defined by

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Example: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{@, \#\}$

$$f(1) = a, f(2) = c, f(3) = a,$$
$$g(a) = @, g(b) = \#, g(c) = \#, g(d) = @,$$
$$\text{Then: } (g \circ f)(1) = @, (g \circ f)(2) = \#, (g \circ f)(3) = @.$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Composition

Fact

For functions $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ and $h : C \longrightarrow D$ we have

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Proof on the tutorials.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Injective functions

Definition

A function $f : A \to B$ is called *one-to-one* or *injective* if any two different arguments have different values. In other words, if for two arguments $x_1, x_2 \in A$ the values $f(x_1) = f(x_2)$ then $x_1 = x_2$.

Example: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$

$$f(1) = a, f(2) = d, f(3) = d.$$

The function f is not 1-1.

$$g(1) = a, g(2) = d, g(3) = c.$$

The function g is 1-1.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Injective functions

Examples:

If $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ then:

$$f(x) = x + 1 \text{ - is 1-1}$$

$$f(x) = x^2 \text{ - is } \textit{not} \text{ 1-1}$$

If $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ then:

$$f(x) = x^2 \text{ - is 1-1}$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Inverse functions

Definition

If a function $f : A \to B$ is 1-1 then we define a function $f^{-1} : f(A) \to A$, whose domain is the image of f and whose codomain is the domain of f, by:

$$f^{-1}(b) = a \text{ if } f(a) = b.$$

f^{-1} is called the inverse of f.

Warning

If f is not 1-1 then it is impossible to invert it.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Inverse functions

Example: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ Let $f : A \to B$ be defined by:

$$f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4$$

Then the inverse $f^{-1} : \{1, 2, 4\} \to A$ is

$$f^{-1}(1) = b, f^{-1}(2) = a, f^{-1}(4) = c$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Composition and inversion

Fact

If the function $f : A \rightarrow B$ is 1-1 then for any $a \in A$ the function f and its inverse f^{-1} satisfy:

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = a$$

Moreover, for any $b \in f(A)$ we have

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = b$$

Example:
If $f(x) = 2x + 1$ then $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Surjective functions

Definition

A function $f : A \to B$ is called *surjective* or *onto* if for any element b there exists an element a whose value under f is b. In other words, for any $b \in B$ there is $a \in A$ such that $f(a) = b$.

Fact

A function $f : A \to B$ is surjective if and only if $f(A) = B$.

Surjective functions

Example: Let $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$ and define $f : A \longrightarrow B$ and $g : A \longrightarrow B$:

$$f(1) = a, f(2) = d, f(3) = d.$$
$$g(1) = a, g(2) = c, g(3) = b.$$

The function f is not onto, whereas the function g is.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Surjective functions

Examples:
If $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ then:

$$f(x) = x + 1 \text{ - is onto}$$

$$f(x) = \sin x \text{ - is } \textit{not} \text{ onto because } f(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

If $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ then:

$$f(x) = \sin(x) \text{ - is onto}$$

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

Bijective functions

Definition

If a function $f : A \longrightarrow B$ is 1-1 and onto then it is called a *bijection*.

Fact

A composition of two bijections is also a bijection.

Proof on the tutorials.

PROGRAM ROZWOJOWY POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!